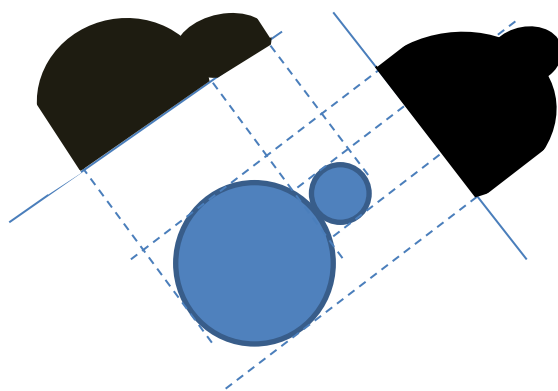


X. PODSTAWOWA MATEMATYKA REKONSTRUKCJI TOMOGRAFICZNYCH

10.1 Definicje; metoda wstecznej projekcji w tomografii transmisyjnej

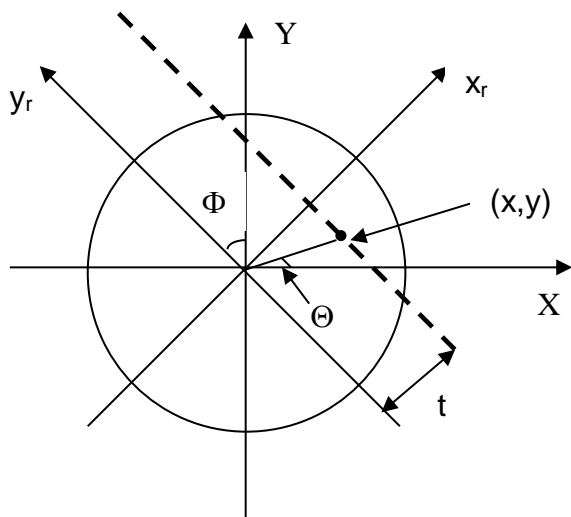


Rys. 10.1 Przykład dwóch rzutów przedmiotu złożonego z dwóch cylindrycznych obiektów

Z czysto matematycznego punktu widzenia, problem rekonstrukcji funkcji z mierzonych rzutów przedmiotu (przykład pokazano na rys. 10.1) zawdzięczamy Radonowi, który opracował odpowiednią matematykę już w 1917 r. Masowe zastosowanie tomografii nastąpiło jednak znacznie później. Za wynalezienie rentgenowskiego tomografu komputerowego Hounsfield wraz z Cormackiem, który podał ulepszony algorytm matematyczny, otrzymali w 1972 roku Nagrodę Nobla. Dokładności otrzymywanych tomogramów są obecnie nadzwyczaj wysokie, przekraczają 10^{-3} .

Gwoli uproszczenia obliczeń zakładamy, że mamy wiązkę równoległą o rozmiarach $w \times h$, gdzie w – szerokość, a h - wysokość wiązki. Rzecz będzie więc dotyczyć tomografów pierwszej generacji. Przyjmijmy, że dokonaliśmy pomiaru wzdłuż

przerwanej linii, równoległej do osi y_r obracającego się układu (x_r, y_r) , związanego z układem źródło-detektor, podczas gdy z nieruchomym pacjentem związany jest układ (X, Y) . W danej odległości x_r od osi y_r ustawionej pod kątem Φ w stosunku do osi Y pacjenta mierzone natężenie wynosi:



Rys. 10.2 Przyjęty do opisu układ współrzędnych

$$I(\Phi, x_r) = I_0 \exp \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x_r, y_r) dy_r \right), \quad (10.1)$$

gdzie relacja pomiędzy współzrędnymi punktu (x, y) oraz (x_r, y_r) jest następująca:

$$\begin{aligned} x_r &= x \cos \Phi + y \sin \Phi \\ y_r &= -x \sin \Phi + y \cos \Phi \end{aligned} \quad (10.2)$$

a $\mu(x_r, y_r)$ oznacza liniowy współczynnik pochłaniania związany z punktem $(x_r, y_r) = (x, y)$. Wzór (10.1) łatwo jest przekształcić na:

$$p(\Phi, x_r) = \ln \left(\frac{I_0}{I(\Phi, x_r)} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x_r, y_r) dy_r \quad (10.3)$$

Wielkość $p(\Phi, x_r)$ nosi nazwę **transformaty Radona** wielkości μ . Wielkość $p(\Phi, x_r) \equiv p_\Phi(x_r)$ nazywamy dla prostoty **projekcją**. Łatwo stwierdzić, że wystarczy ją zmierzyć tylko na półokręgu, gdyż zamiana detektora i źródła miejscami nie może zmieniać wartości projekcji, tj.

$$p_\Phi(x_r) \equiv p(\Phi, x_r) = p(\pi + \Phi, -x_r) \quad (10.4)$$

Zadaniem tomografii jest, jak już mówiliśmy we wcześniejszym wykładzie, zrekonstruowanie funkcji $\mu(x_r, y_r)$, a więc i $\mu(x, y)$. Rekonstrukcja ta wcale nie jest prosta, nie tylko ze względów czysto matematycznych. Przede wszystkim trzeba mieć świadomość, że obrazując rozkład współczynnika pochłaniania w danej płaszczyźnie zakładamy, że dane pomiarowe rzeczywiście dotyczą nieskończenie cienkich przekrojów, tak że zamiast trójwymiarowych voxelów możemy mówić o dwuwymiarowych pixelach. Po drugie, zakładamy, że wszystkie rejestrowane fotony poruszały się po liniach prostych pomiędzy źródłem a detektorem. W rzeczywistości wiązka promieniowania X ma skończone rozmiary i rozbieżność kątową, a w trakcie przechodzenia przez obiekt wiązka ulega „stwardnieniu”, gdyż promieniowanie o niższych energiach jest silniej pochłaniane i do odleglejszych warstw przechodzi relatywnie więcej promieniowania o wyższej energii. Dodatkowo jeszcze zakładamy, że rozkład współczynnika absorpcji w ramach rozmiaru wiązki i jej rozbieżności kątowej jest jednorodny.

Umiejętność szybkiej i precyzyjnej rekonstrukcji jest oczywiście niezbędna. Od początkowo algebraicznej metody używanej przez Hounsfielda, który mógł dokonać rekonstrukcji z 80x80 obrazów z dokładnością ok. 10^{-2} wykonano znaczący krok, a późniejsza metoda Ramachandrana i Lakshminarayanan pozwoliła na rekonstrukcje z 256x256 a także 512x512 obrazów w rozsądnym czasie i z dokładnością o rząd wielkości lepszą.

Charakterystyczną odmiennością metody SPECT od transmisyjnej tomografii komputerowej (CT) jest badanie nie tyle współczynnika pochłaniania w danym obszarze, ile aktywności wychodzącej z danego miejsca, tak więc mierzymy wielkość

$$p_A(\Phi, x_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x_r, y_r) dy_r, \quad (10.5)$$

gdzie $A(x_r, y_r)$ – aktywność wychodząca z punktu (x_r, y_r) , którą wyznaczamy w oparciu o pomiar wielkości $p_A(\Phi, x_r)$. Zarówno w metodzie CT, jak i SPECT dążymy do wyznaczenia rozkładu dwuwymiarowego z serii mierzonych danych jednowymiarowych.

Założmy, że pomiary wykonywane są w serii kroków, w których kąt Φ zmienia się o $\delta\Phi$, a odległość x_r zmienia o $\delta x_r = \delta t$. Efektywnie wyznaczamy zatem wielkości p_{ij} , gdzie

$$p_{ij} = p(i\delta\Phi, j\delta t) \quad (10.6)$$

Nas interesuje odpowiednia funkcja podcałkowa we wzorze (10.3) lub (10.5). Funkcję tę rekonstruujemy także na dyskretnej siatce pixeli o rozmiarach np. $w \times w$, a więc zmierzamy do znalezienia wartości

$$\mu_{ij} = \mu(iw, jw) \quad (10.7)$$

lub

$$A_{ij} = A(iw, jw) \quad (10.8)$$

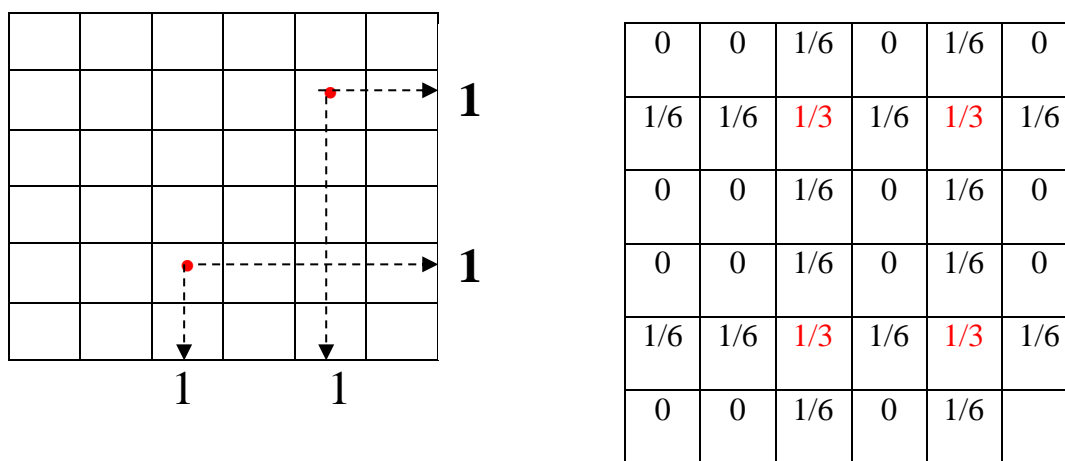
W praktyce numerycznej wygodnie jest posługiwać się raczej macierzą jednowymiarową niż dwuwymiarową. Jeśli rozmiar interesującej nas macierzy wynosi $N = n \times n$, to można zapisać pierwsze n współczynników pierwszego wiersza, następnie przypisać pierwszemu współczynnikowi drugiego wiersza element $(n+1)$ -szy, pierwszemu współczynnikowi trzeciego wiersza element $(2n+1)$ -szy itd. W podobny sposób możemy opisać zarówno wielkości mierzone, jak i rekonstruowane. W takiej zdyskretyzowanej formie nasze równania mają postać:

$$p_j = \sum_{k=1}^N r_{jk} \mu_k \quad (10.9)$$

Jeśli dysponujemy J pomiarami projekcji p_j , to wielkości $\{\mu_k\}$ teoretycznie można otrzymać przez proste odwrócenie macierzy r_{jk} . W praktyce nie jest to wcale takie proste. Po pierwsze, liczba elementów tej macierzy jest znaczna. Jeśli $n = 256$, to liczba elementów wektora μ_j wynosi 65536, a więc – przy identycznej długości wektora p_j macierz r_{jk} zawiera 65536 x 65536 elementów, tj. ponad 4 miliardy

elementów. Odwracanie tak wielkiej macierzy jest trudnością samą w sobie – problemem numerycznym (zapewnienie odpowiedniej dokładności odwracania), ale też i czasowym. Po drugie, zanim zabierzemy się do rekonstrukcji musimy wykonać wszystkie pomiary, co wydłuża czas uzyskiwania obrazu. Wreszcie niebagatelną sprawą są szумы pomiarowe, które mogą bardzo zdeformować wynik.

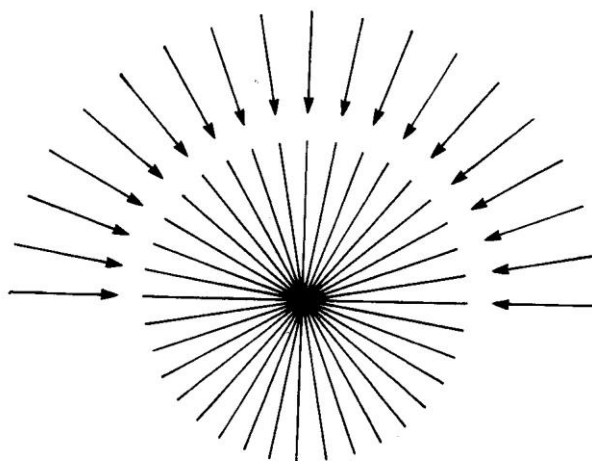
Obrazy można uzyskać w dużym przybliżeniu **metodą wstecznej projekcji**, która polega na przypisaniu każdemu pixelowi znajdującemu się na danej linii takiego samego ułamka zmierzonej wartości natężenia, tj. jeśli zmierzone natężenie wynosi I , a na tej linii znajduje się m pixeli, to każdemu pixelowi przypisujemy wartość I/m (alternatywnie możemy każdemu pixelowi przypisać wartość I , gdyż w końcu sprowadzi się to tylko do normalizacji natężeń w obrazie). Suma natężeń w każdym pixelu, uzyskanych z każdego pomiaru daje wyobrażenie o interesującym nas obrazie. Na rys. 10.3 pokazano zastosowanie tej metody do rekonstrukcji świecenia w wypadku istnienia dwóch świecących punktów i tylko dwóch, prostopadłych projekcji. Mierząc natężenia wzdłuż kierunków prostopadłych otrzymamy np. identyczne wartości, powiedzmy jedynekowe, jak na rysunku z lewej strony.



Rys. 10.3 Odtwarzanie obrazu punktów świecących (czerwone) z dwóch prostopadłych projekcji. Po lewej stronie rysunku pokazano miejsca świecenia (czerwone punkty) i natężenia zmierzone wzdłuż projekcji. Po prawej stronie pokazujemy wynik rekonstrukcji metodą wstecznej projekcji.

Postępując zgodnie z algorytmem wstecznej projekcji, pixelom na liniach drugiej i piątej (licząc od góry) przypiszemy wartości $1/6$ i podobnie w kolumnach 3 i 5 (od lewej). Łatwo sprawdzić, że, po dodaniu obu wartości, miejscom świecenia (punkty) przypisze się w ten sposób wartości $1/3$. Taka sama wartość pojawi się w pixelach (2,3) i (5,5). Pixelom nie leżącym wzdłuż mierzonej projekcji przypiszemy oczywiście natężenia zerowe. Dysponowanie tak ograniczoną informacją i prostym algorytmem doprowadziło nas zatem do znalezienia miejsc świecenia, ale także i artefaktów: smug w wierszach 2 i 5 oraz kolumnach 3 i 5, a także nie istniejących miejsc świecenia o natężeniach identycznych z rzeczywistymi miejscami świecenia. Łatwo sprawdzić, że wykonanie dodatkowych projekcji pod kątami 45 stopni nie usunie tych artefaktów.

W ogólnym wypadku położenia miejsc „gorących” będą silnie rozmyte, a przy okazji pojawią się inne artefakty, choć o słabszych natężeniach. Wraz ze wzrostem liczby projekcji rozmycie miejsca świecenia spada i otrzymywany rozkład natężenia zmienia się jak $1/r$ (rys. 10.4), co wykażemy nieco później. Taka sytuacja jest jednak na ogół trudna do zaakceptowania w diagnostyce rzeczywistych przypadków.



Rys. 10.4 Wynik rekonstrukcji punktu świecącego metodą wstecznej projekcji, gdy wykona się dużą liczbę projekcji

W szczególnym wypadku jednego punktu świecącego (pochlaniającego) matematyka rekonstrukcji wygląda prościej.

$$\mu(x, y) = \sum_{j=1}^n p(j\delta\phi, r)\delta\phi, \quad (10.11)$$

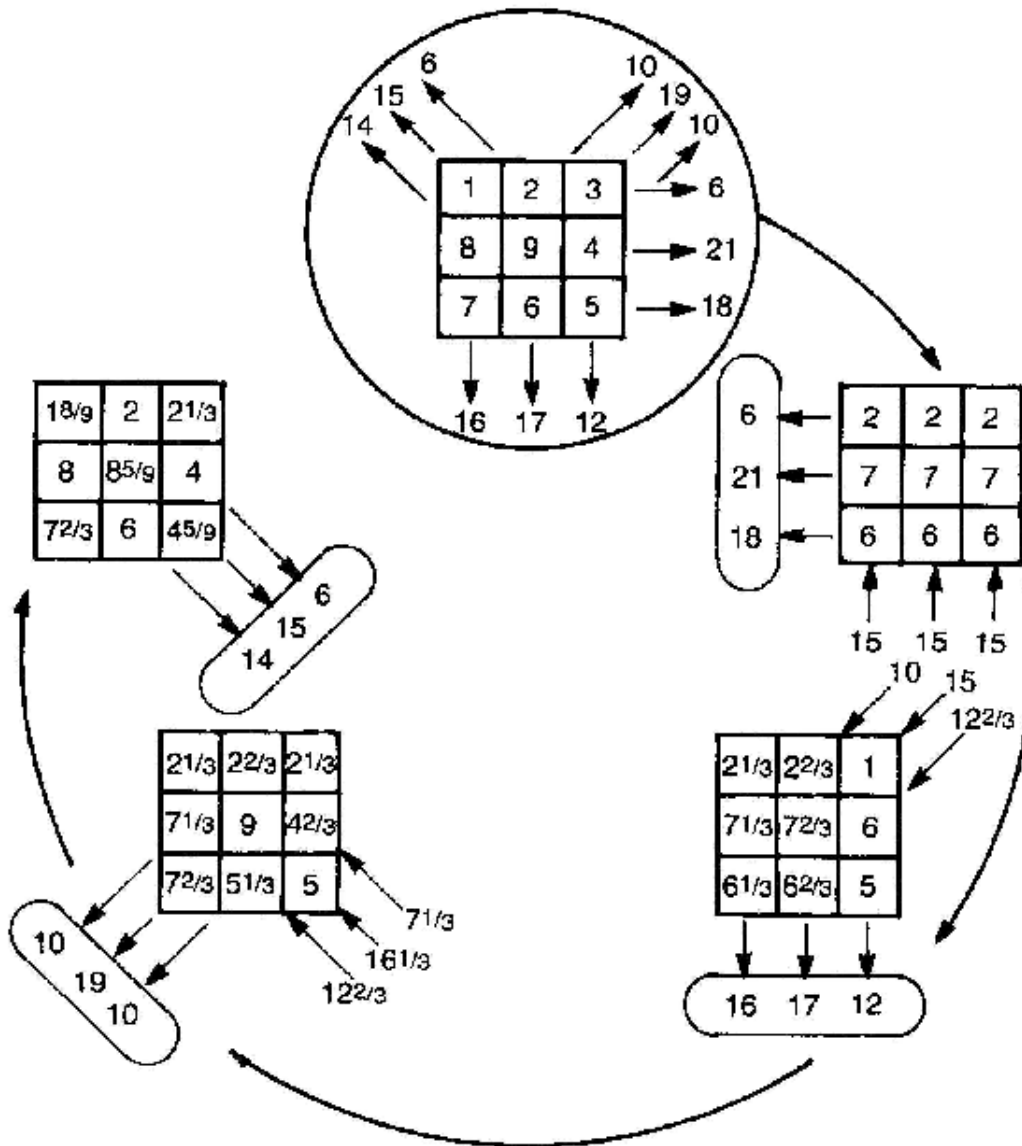
gdzie

$$x_{ij} = x \cos(j\delta\phi) + y \sin(j\delta\phi), \quad (10.12)$$

a przy n projekcjach skok kąta wynosi $\delta\phi = \pi/n$. Rozmywanie ostrych szczegółów obrazu jest w medycynie nuklearnej nie do zaakceptowania i z tego względu stosuje się inne techniki rekonstrukcji, w szczególności oparte o transformaty Fouriera, dla których opracowano szybkie algorytmy. Zwróćmy jednak też uwagę, że proste rzutowanie wsteczne jest bezwymiarowe, podczas gdy poszukiwany współczynnik pochłaniania ma wymiar odwrotności długości i zależy więc od użytych jednostek. Aby sobie poradzić z tym problemem należy w odpowiedni sposób normalizować rekonstrukcje.

Rekonstruując rozkład współczynnika pochłaniania możemy skorzystać z metody iteracyjnej. Dla każdego pixela wystarczy tylko raz wyznaczyć współczynniki r_{jk} w równaniu (10.9), a następnie tak dobierać wartości μ_k , aż osiągnie się najlepsze odwzorowanie mierzonych projekcji. Przykład takiego iteracyjnego rozwiązania jest pokazany na rys. 10.5. W pierwszej kolejności bierze się pod uwagę tylko wyniki horyzontalnych projekcji, co oczywiście powoduje złe odtworzenie wyników dla projekcji pionowych. W drugim kroku równomiernie rozkłada się różnice aktualnych i odtworzonych projekcji wertykalnych. Następnie robimy to samo dla projekcji ukośnych itd.

Bodaj najważniejszym pytaniem praktycznym jest tu pytanie o liczbę niezbędnych projekcji dla zrekonstruowania rozkładu $\{\mu_k\}$. Łatwo się domyśleć, że im bardziej będzie skomplikowany rozkład, tym większa liczba projekcji będzie potrzebna do jego prawidłowej rekonstrukcji. Niemniej jednak w realnych sytuacjach wystarczy zawsze ich skończona liczba.



Rys. 10.5 Przykład iteracyjnej metody rekonstrukcji¹

10.2 Transformacje Fouriera

Do otrzymania dokładniejszych rekonstrukcji współczynnika absorpcji (lub rozkładu aktywności) stosujemy bardziej wyrafinowane metody, oparte głównie na wykorzystaniu transformat Fouriera. Jednowymiarową transformatę Fouriera funkcji $p(\Phi, x_r)$ definiujemy jako:

¹ T.A.Delchar, Physics in Medical Diagnostics, Chapman&Hall (1997)

$$P_{\Phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\Phi, x_r) \exp(-2\pi i \xi x_r) dx_r \equiv FT[p(\Phi, x_r)] \quad (10.13)$$

Transformata dwuwymiarowa wygląda podobnie:

$$M(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t, s) \exp(-2\pi i(\xi t + \eta s)) dt ds \equiv FT[\mu(t, s)] \quad (10.14)$$

Ze względu na definicję projekcji, patrz wzór (10.3), można łatwo pokazać, że funkcja $P_{\Phi}(\xi)$ jest dwuwymiarową funkcją $M(\xi, \eta)$ opisaną wzorem (10.14), liczoną dla $\eta=0$ i $t = x_r$. Korzystając z transformacji (10.2) możemy zapisać równanie (10.14) inaczej:

$$\begin{aligned} M(\xi, \eta)|_{\eta=0} &= \iint \mu(x_r, y_r) \exp[-2\pi i\{x(\xi \cos \Phi - \eta \sin \Phi) + y(\xi \sin \Phi + \eta \cos \Phi)\}] dx_r dy_r |_{\eta=0} \\ &= \iint \mu(x, y) \exp[-2\pi i(x\xi \cos \Phi + y\xi \sin \Phi)] dx dy \equiv M(\Phi, R) \end{aligned} \quad (10.15)$$

Jak widać, możemy zmienną ξ potraktować jako szczególny promień w przestrzeni Fouriera, zdefiniowany jako

$$R^2 = \xi^2 + \eta^2 |_{\eta=0} = \xi^2 \quad (10.16)$$

i napisać

$$P_{\Phi}(\xi) = \iint \mu(x_r, y_r) e^{-2\pi i \xi x_r} dx_r dy_r = M(\xi, \eta)|_{\eta=0} = M(\Phi, R) \quad (10.17)$$

W praktyce to wygląda tak, jak byśmy przeszli do zmiennych biegunowych w przestrzeni Fouriera. Jednowymiarowa transformata projekcji równa jest zatem transformacie dwuwymiarowej interesującej nas funkcji $\mu(x_r, y_r)$ wzdłuż określonego kierunku. Mając zbiór zmierzonych $p_{\Phi}(x_r)$ dla różnych kierunków obliczamy transformaty $P(\Phi, \xi)$ a następnie dokonujemy transformacji odwrotnej Fouriera:

$$\mu(x, y) = FT^{-1}[M(\xi, \eta)] \Big|_{\eta=0} \quad (10.18)$$

Jak widać, jednowymiarowa transformata Fouriera projekcji (10.13) jest wynikiem scałkowania transformaty Fouriera współczynnika absorpcji wzdłuż jednego kierunku lub, inaczej mówiąc, przekrojem przez dwuwymiarową transformatę $\mu(x, y)$ wzdłuż osi ξ sprzężonej z osią x . Jeśli zatem dysponujemy naborem projekcji, możemy odtworzyć (zrekonstruować) rozkład współczynnika absorpcji w badanej przez nas płaszczyźnie. Wykonując takie transformaty należy brać pod uwagę istnienie szumów pomiarowych, które przekładają się na szum w obrazie. Ponadto, ograniczoność danych prowadzić może do powstania w obrazie artefaktów.

10.3 Twierdzenie o splocie

Splot funkcji $h(x, y)$ i $f(x, y)$ zdefiniowany jest jako

$$g(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} h(x-t, y-s) f(t, s) dt ds \equiv h * f \quad (10.19)$$

Założmy, że obie rozpatrywane funkcje mają transformaty Fouriera równe odpowiednio

$$H(\xi, \eta) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} h(x, y) \exp[-2\pi i(\xi x + \eta y)] dx dy = FT[h(x, y)]$$

i

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(x, y) \exp[-2\pi i(\xi x + \eta y)] dx dy = FT[f(x, y)]$$

Można pokazać, że transformata Fouriera splotu funkcji h i f wynosi

$$G(\xi, \eta) = H(\xi, \eta)F(\xi, \eta) \quad (10.21)$$

Stosując operację odwrotną można też dowieść, że

$$FT^{-1}[H(\xi, \eta)F(\xi, \eta)] = FT^{-1}[H(\xi, \eta)] * FT^{-1}[F(\xi, \eta)] = h(x, y) * f(x, y) \quad (10.22)$$

10.4 Wsteczna projekcja wykorzystująca transformaty Fouriera

Pokażemy teraz, w jaki sposób, korzystając z idei wstecznej projekcji i techniki fourierowskiej, można uzyskać rekonstrukcję przestrzennego rozkładu współczynnika absorpcji. Zgodnie z ideą wstecznej projekcji, wszystkim pixelom wzdłuż badanego kierunku przypisujemy takie same wartości. Dla ułatwienia, niech będą one równe wartościom zmierzonych projekcji, a więc

$$\mu(x_r, y_r) = p(\Phi, x_r) \quad (10.23)$$

Korzystając z projekcji zmierzonych pod różnymi kątami otrzymamy więc:

$$\mu_S(x, y) = \mu_S(\Theta, r) \equiv \mu_S(x_r, y_r) = \int_0^\pi p(\Phi, x_r) d\Phi = \int_0^\pi p[\Phi, r \cos(\Phi - \Theta)] d\Phi, \quad (10.24)$$

gdzie r jest długością wektora wodzącego (x, y) , a oznaczenia kątów i innych wielkości zostały podane na rys. 10.2. Indeks „S” przy wielkości funkcji μ oznacza, że chodzi o wynik sumacyjny (całkowy).

Rozpatrzmy dla przykładu sytuację, w której pochłanianie zachodzi jedynie w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ oznaczonym na wspomnianym rysunku, a więc

$$\mu(x, y) \equiv \mu(x_r, y_r) = \delta(x_r) \delta(y_r) \quad (10.25)$$

Projekcja tej funkcji wynosi po prostu $\delta(x_r)$, a więc funkcja μ_S równa będzie

$$\mu_s(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \delta(x_r) d\Phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \delta[r \cos(\Phi - \Theta)] d\Phi \quad (10.26)$$

Ponieważ dla dowolnej funkcji $f(x)$

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}} \quad (10.27)$$

gdzie x_i są miejscami zerowymi funkcji $f(x)$, otrzymujemy

$$\mu_s(x, y) = \frac{1}{\pi r |\sin(\Phi - \Theta)|} \Big|_{\cos(\Phi - \Theta) = 0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (10.28)$$

Z punktowego obiektu utworzył się zatem obiekt o symetrii kołowej o natężeniu zmieniającym się jak $1/r$. Wynik ten zasygnalizowaliśmy już wcześniej na rys. 10.4. Ewidentnie obraz sumacyjny i rzeczywisty się różni i w związku z tym należy opracować metodę zniwelowania efektu $1/r$. Zobaczmy, w jaki sposób możemy sobie pomóc. Zgodnie z naszym wcześniejszym wynikiem (10.18):

$$\mu(x, y) = \mu(r, \Theta) = \int_0^\pi d\Phi \int_{-\infty}^{+\infty} M(\Phi, R) \exp[2\pi i R(x \cos \Phi + y \sin \Phi)] |R| dR \quad (10.29)$$

Powyższą relację możemy zapisać w postaci:

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi p^F(\Phi, u) d\Phi \Big|_{u=x \cos \Phi + y \sin \Phi}, \quad (10.30)$$

gdzie

$$p^F(\Phi, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\Phi, R) |R| \exp(2\pi i R u) dR = FT^{-1}[M(\Phi, R) |R|] \quad (10.31)$$

Ze wzorów (10.17) i (10.18) wynika jednak, że:

$$FT^{-1}[M(\Phi, R)|R] = FT^{-1}[P(\Phi, R)|R] = FT^{-1}[P(\Phi, \xi)|\xi] \quad (10.32)$$

Dla dalszego postępowania musimy skorzystać z twierdzenia o transformacie Fouriera splotu funkcji:

$$FT^{-1}[P(\Phi, \xi)|\xi] = FT^{-1}[P(\Phi, \xi)] * FT^{-1}(|\xi|) \quad (10.33)$$

Transformata Fouriera bezwzględnej wartości zmiennej (w tym wypadku ξ) nie istnieje, jako że jest to funkcja nieograniczona. Aby móc prowadzić obliczenia musimy zatem założyć, że transformata Fouriera zawiera tylko skończoną liczbę składowych, co sprowadza się do sztucznego ograniczenia zakresu zmienności ξ do zakresu $(0, \xi_{\max})$. Zatem, zamiast liczyć transformatę bezwzględnej wartości ξ obliczamy transformatę funkcji

$$\begin{aligned} \Xi(\xi) &= 0 & \text{dla} & \quad |\xi| \geq \xi_{\max} \\ \Xi(\xi) &= |\xi| & \text{dla} & \quad |\xi| < \xi_{\max} \end{aligned} \quad (10.34)$$

Transformata ta ma następującą postać:

$$\begin{aligned} f_{\Xi}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| \exp(2\pi i \xi u) d\xi = \int_0^{\xi_{\max}} \xi \exp(2\pi i \xi u) d\xi - \int_{-\xi_{\max}}^0 \xi \exp(2\pi i \xi u) d\xi = \\ &= \frac{\xi \exp(2\pi i \xi u)}{2\pi i u} \Big|_0^{\xi_{\max}} - \frac{\xi \exp(2\pi i \xi u)}{2\pi i u} \Big|_{-\xi_{\max}}^0 - \int_0^{\xi_{\max}} \frac{\exp(2\pi i \xi u)}{2\pi i u} d\xi + \int_{-\xi_{\max}}^0 \frac{\exp(2\pi i \xi u)}{2\pi i u} d\xi = \\ &= \xi_{\max} \frac{\sin(2\pi \xi_{\max} u)}{\pi u} + \frac{\cos(2\pi \xi_{\max} u) - 1}{2\pi^2 u^2} = \xi_{\max}^2 [2 \sin c(2\xi_{\max} u) - \sin c^2(\xi_{\max} u)] \end{aligned} \quad (10.35)$$

gdzie

$$\sin c(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (10.36)$$

Zatem, łącząc wzory (10.33) i (10.35):

$$p^F(\Phi, x_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\Phi, u) f_{\Xi}(x_r - u) du \quad (10.37)$$

Ograniczenie zakresu częstości fourierowskich redukuje wpływ szumów pomiarowych. Procedurę taką nazywamy więc *filtrowaniem*, a wzór (10.37) jest właśnie wzorem wykorzystującym konkretny filtr. Zauważmy, że jeśli filtrem f będzie funkcja δ -Diraca, to $p^F(\Phi, x_r)$ będzie tożsame z $p(\Phi, x_r)$, a więc rzeczywiste wartości $\mu(x, y)$ i sumacyjne $\mu_S(x, y)$ będą takie same.

Mając obliczoną funkcję p^F dla każdego kąta Φ , dla którego wykonano pomiary, można wykonać ostateczne wsteczne rzutowanie zmierzonych projekcji.

W praktyce analiz fourierowskich stosowane są rozmaite filtry². Ponadto, numeryczne obliczenia dotyczą raczej szeregów niż całek. Przyjmując w dyskretyzacji zmiennych krok $(2\xi_{\max})^{-1}$, dyskretna postać filtru (10.35), nazywana *filtrem Ramachandrana - Lakashminarayanana*, jest następująca:

$$f_{\Xi}(i\Delta u) \equiv f_i = \begin{cases} \xi_{\max}^2 & \text{dla } i = 0 \\ \frac{-4\xi_{\max}^2}{\pi^2 i^2} & \text{dla } i = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & \text{dla } i = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases} \quad (10.38)$$

Innym, często stosowanym filtrem jest *filtr Sheppa i Logana*, który różni się od poprzedniego czynnikiem mnożącym, jakim jest funkcja *sinc*:

$$F_{SL}(\xi) = \Xi(\xi) \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \quad (10.39)$$

² E.Rokita w Fizyczne metody diagnostyki medycznej i terapii, red. A.Z.Hryniewicz i E.Rokita, PWN (2000)

Jego postać dyskretna jest następująca:

$$f_i^{SL} = \frac{-8\xi_{\max}^2}{\pi^2} \left[\frac{1}{4i^2 - 1} \right], \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (10.40)$$

Jeśli w funkcji $p^F(\Phi, x_r)$ przyjmiemy dla zmiennej x_r krok $w = \Delta u = \Delta x_r = (2\xi_{\max})^{-1}$, otrzymamy dla filtra Ramachandrana i Lakshminarayanana dyskretną postać projekcji :

$$p^F(\Phi, iw) = p_i^F(\Phi) = \frac{1}{4w} p_i(\Phi) - \frac{1}{\pi^2 w} \sum_n \frac{p_{i-n}(\Phi)}{(i-n)^2} \quad (10.41)$$

We wzorze (10.41) sumowanie przebiega po wszystkich wartościach n , dla których $(i-n)$ jest liczbą nieparzystą.

Wartości wstecznej projekcji w postaci dyskretniej są następujące:

$$\mu(x, y) = \mu(iw, jw) = \mu_{ij} = \sum_k p^F(k\Delta\Phi, x_r) = \sum_k p_k^F(x_r), \quad (10.42)$$

gdzie w jest rozmiarem pixela, natomiast, zgodnie ze wzorem (10.1)

$$x_r = (iw) \cos(k\Delta\Phi) + (jw) \sin(k\Delta\Phi) \quad (10.43)$$

We wzorze (10.42) sumowanie po k odpowiada sumowaniu po wszystkich projekcjach zmierzonych dla kątów $k\Delta\Phi$, natomiast zmienna x_r wybiera ze wszystkich tych projekcji tę, która przechodzi przez pixel (ij) . Dodatkowym krokiem w rekonstrukcji jest normalizacja, aby suma zmierzonych projekcji była równa sumie projekcji po wykonaniu operacji filtrowania.

Opisana metoda jest popularna, gdyż jest szybka, a obliczenia można wykonywać w trakcie pomiarów. Jednak dla dobrej rekonstrukcji wymagana jest duża liczba projekcji, co jest pewną wadą metody.

10.5 Rekonstrukcja obrazu metodami iteracyjnymi³

Na rys. 10.5 przedstawiliśmy najprostszy sposób iteracyjnego odtwarzania przestrzennego rozkładu współczynnika pochłaniania jako przeciwwagę dla matematycznie poprawnej metody, w której należy wpierw odwrócić macierz r_{ij} w równaniu (10.10). Odwracanie to jest jednak nieefektywne, a samo równanie można rozwiązać metodą iteracyjną np. Raphsona-Newtona albo którąkolwiek inną. Rekonstrukcja polega na wykonaniu obliczeń w czterech krokach.

Krok 1: przyjmujemy pewne wartości początkowe μ_k^0 , najprościej średnią ze zmierzonej liczby J projekcji:

$$\mu_k^0 = \bar{\mu} = \frac{1}{N_t N_\phi} \sum_{i=1}^J p_i \quad (10.44)$$

gdzie N_t i N_ϕ oznaczają odpowiednio liczbę projekcji wykonanych w poprzecznym kierunku (wzdłuż zmiennej x_r), a N_ϕ - liczbę kątów, dla których przeprowadzano pomiary projekcji.

Krok 2: obliczenie wartości projekcji na podstawie wartości $\mu_k^{(l)}$ otrzymanych po l iteracjach:

$$z_j^{(l)} = \sum_{k=1}^N r_{jk} \mu_k^{(l)} \quad (10.45)$$

Krok 3: Zmodyfikowanie wartości $\mu_k^{(l)}$ zgodnie z zasadą danej funkcji iteracyjnej:

$$\mu_k^{(l+1)} = \mu_k^{(l)} + f(p_j, z_j^{(l)}) \quad (10.46)$$

Krok 4: powtarzanie kroków 1-3 aż do uzyskania zbieżności w wartościach projekcji.

³ E.Rokita w Fizyczne metody diagnostyki medycznej i terapii, red. A.Z.Hryniewicz i E.Rokita, PWN (2000)

Poniżej omówimy trzy popularne metody rekonstrukcji.

W **metodzie ART** (od *Algebraic Reconstruction Technique*) relacja (10.46) ma postać:

$$\mu_k^{(l+1)} = \mu_k^{(l)} \frac{p_j}{z_j^{(l)}} \quad (10.47)$$

albo

$$\mu_k^{(l+1)} = \max\left(0, \mu_k^{(l)} + \frac{p_j - z_j^{(l)}}{N_j}\right), \quad (10.48)$$

gdzie N_j oznacza liczbę pixeli dających wkład do j -tej projekcji. Obliczenia takie prowadzimy dla wszystkich projekcji, jedna po drugiej, co oznacza, że wartości w danym k -tym pixelu są modyfikowane tyle razy, ile mamy projekcji. Tę właśnie metodę w praktycznym działaniu zaprezentowaliśmy na rys. 10.4. Tego rodzaju łatwo wykonywalne na komputerze przybliżenie prowadzi czasem do artefaktów, co jest związane z wstawianiem do mianownika poprawki wielkości N_j . Lepsze wyniki otrzymujemy, gdy nasza poprawka jest nie $(p_j - z_j^{(l)})/N_j$ lecz⁴

$$\mu_k^{(l+1)} = \max\left(0, \mu_k^{(l)} + \frac{p_j}{L_j} - \frac{z_j^{(l)}}{N_j}\right), \quad (10.49)$$

gdzie L_j jest długością linii przechodzącej przez konkretny pixel. Rekonstrukcje wykonywane metodą ART nazywane są czasem „szumem pieprzu i soli”, związanym z nadmierną prostotą używanego przybliżenia. Szum ten można zredukować przez wprowadzenie do obliczeń pewnych relaksacji, tj. branie tylko części obliczanych poprawek (patrz czynnik gaszący w równaniu (10.54)). Zmniejszenie szumu pociąga za sobą jednak wydłużenie czasu obliczeń.

⁴ A.C.Kak, M.Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press (1999)

Metoda SIRT (od *Simultaneous Iterative Reconstruction Technique*) wykonuje podobne iteracje, ale bierze pod uwagę jednocześnie wszystkie zmierzone projekcje, które przechodzą przez k -ty pixel. O ile, w metodzie ART modyfikacje następują kolejno w każdym pixelu, w metodzie SIRT obliczamy poprawki dla wszystkich pixeli i dopiero po rozwiązaniu wszystkich równań wprowadzamy te poprawki. Modyfikacje wartości μ_k są tu następujące:

$$\mu_k^{(l+1)} = \mu_k^{(l)} \frac{\sum_{k(\Phi)} p_{k(\Phi)} \sum_{k(\Phi)} N_{k(\Phi)}}{\sum_{k(\Phi)} L_{k(\Phi)} \sum_{k(\Phi)} z_{k(\Phi)}^{(l)}} \quad (10.50)$$

gdzie L oznacza długość projekcji, a nie liczbę pixeli N . Alternatywnie używa się

$$\mu_k^{(l+1)} = \max \left(0, \mu_k^{(l)} + \frac{\sum_{k(\Phi)} p_{k(\Phi)} - \sum_{k(\Phi)} z_{k(\Phi)}^{(l)}}{\sum_{k(\Phi)} L_{k(\Phi)} - \sum_{k(\Phi)} N_{k(\Phi)}} \right) \quad (10.51)$$

W obu wzorach sumowanie przebiega po wszystkich projekcjach wnoszących wkład do k -tego pixela. W SIRT normalizuje się wartości μ po każdej iteracji.

O ile opisane dwie metody są stosowane przede wszystkim do zrekonstruowania obrazu, można też skorzystać z ogólnej **procedury LSIT** (od *Least-Square Iterative Technique*, a więc metody iteracyjnej wg schematu najmniejszych kwadratów), która oparta jest na minimalizacji funkcji

$$R = \sum_j \frac{(p_j - z_j^{(l)})^2}{\sigma_j^2}, \quad (10.52)$$

gdzie $\{\sigma_j\}$ oznaczają niepewności pomiarowe. Tu, poszukując najmniejszej wartości funkcji R , przyrównujemy pochodną funkcji R do zera, w wyniku czego otrzymujemy:

$$\mu_k^{(l+1)} = \mu_k^{(l)} + \Delta\mu_k^{(l)} = \mu_k^{(l)} + \frac{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} (p_j - z_j^{(l)}) r_{jk}}{\sum_j \frac{r_{jk}^2}{\sigma_j^2}} \quad (10.53)$$

Dla polepszenia szybkości zbieżności iteracji wprowadza się czynnik gaszący ε , ograniczający krok w danej iteracji:

$$\mu_k^{(l+1)} = \mu_k^{(l)} + \varepsilon \Delta\mu_k^{(l)} \quad (10.54)$$

gdzie ε można wyznaczyć np. ze wzoru:

$$\varepsilon = \frac{\sum_j \frac{(p_j - z_j^{(l)})}{\sigma_j^2} \sum_k r_{jk} \Delta\mu_k^{(l)}}{\sum_j \frac{1}{\sigma_j^2} (\sum_k r_{jk} \Delta\mu_k^{(l)})^2} \quad (10.55)$$

Metody iteracyjne pozwalają na otrzymanie obrazu nawet w sytuacjach, gdy zmierzona liczba projekcji J jest mniejsza od liczby pixeli N , a więc metoda wstecznej projekcji nie jest możliwa. Jednakże metody iteracyjne należy stosować zawsze z dużą ostrożnością, gdyż ich wynik może zawierać artefakty. *Nota bene*, nie ma metod idealnych, które gwarantowałyby prawidłowe, a więc bez zniekształceń, odtworzenie wszystkich szczegółów badanego obiektu. Dokładność jest funkcją ilości zebranej informacji, stopnia złożoności obiektu oraz rozmiaru oczek siatki, na której dokonujemy rekonstrukcji.

Istnieje też metoda, której akronimem jest **SART** (od ang. *Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique*), która łączy niejako w sobie najlepsze cechy opisanych wyżej metod ART I SIRT. Jej zaletą jest to, że pozwala na uzyskanie dobrej rekonstrukcji obrazu już w jednym kroku⁵.

⁵ Opis tej techniki można znaleźć w cytowanej już monografii A.C.Kak, M.Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press (1999)