Narodowe Centrum Badań Jądrowych
Dział Edukacji i Szkoleń
ul. Andrzeja Sołtana 7, 05-400 Otwock-Świerk

ĆWICZENIE 11	L A B O R A T O R I U M F I Z Y K I A T O M O W E J I J Ą D R O W E J **Pomiar stosunku e/m dla elektronów**

Data pomiaru: ……..……

Imię i nazwisko: ……...……...

Imię i nazwisko: ……...……...

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest obserwacja ruchu elektronów w polach: elektrycznym kondensatora i magnetycznym wytworzonym przez dwie cewki Helmholtza w zależności od ich natężeń oraz wyznaczenie stosunku e/m.

2. UKŁAD DOŚWIADCZALNY

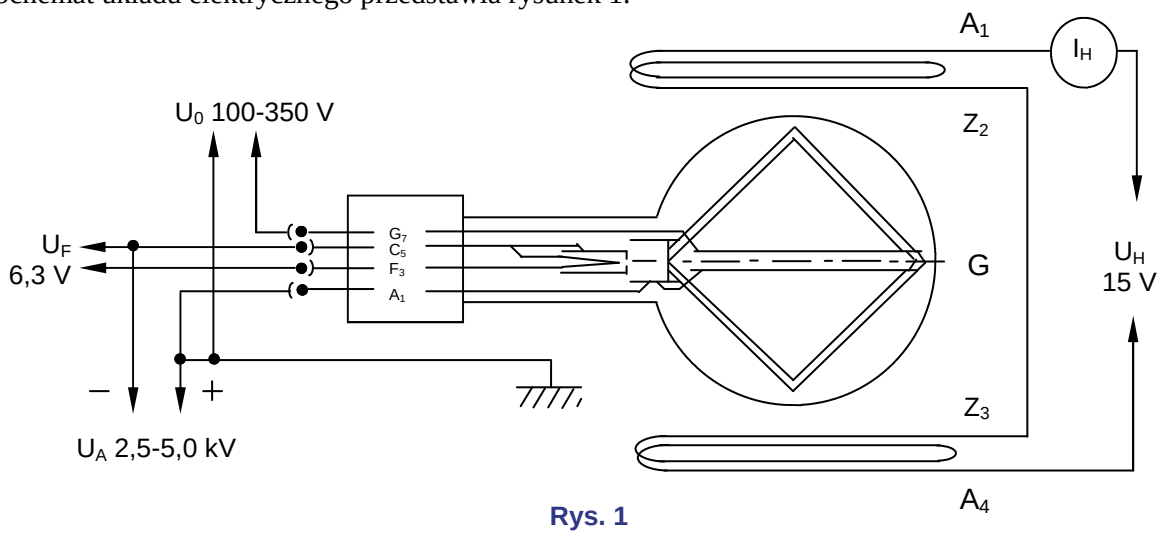
W tym ćwiczeniu ruch elektronów będziemy obserwować i mierzyć w tzw. lampie Thomsona. Korzystamy z kilku źródeł zasilania:

- zasilacz wysokiego napięcia (stałego) – do 5 kV – o symbolu *52 170*, będący źródłem napięcia przyspieszającego elektrony w lampie,
- zasilacz wysokiego napięcia (stałego) – do 500 V – o symbolu *52 165*, do wytwarzania silnego pola elektrycznego wewnątrz lampy, skierowanego prostopadle do kierunku ruchu elektronów,
- zasilacz niskiego napięcia (stałego) – do 15 V – o symbolu *52 150*, zasilający cewki Helmholtza, ustawione po obu stronach lampy,
- źródło prądu zmiennego o napięciu 6,3 V, do zasilania układu żarzenia „działa elektronowego” w lampie – umieszczone na tylnej ściance zasilacza 52 170.

Charakterystyka lampy:

- odległość płytek kondensatora d = 8 mm = $8\cdot 10^{-3}$ m,
- długość boku płytki z luminoforem: 80 mm = $80\cdot 10^{-3}$ m.

Schemat układu elektrycznego przedstawia rysunek 1.



Rys. 1

3. WSTĘP TEORETYCZNY

Lampa Thomsona jest próżniową kulą ze szkła, w której znajduje się urządzenie („działo elektronowe”) wysyłające w przestrzeń dobrze skolimowaną wiązkę elektronów. Wiązka elektronów, mająca w tej lampie średnicę ok. 2 mm, „ślizga się” po powierzchni płatka miki umieszczonego wewnątrz lampy próżniowej. Płatek miki pokryty jest luminoforem, pozwalającym śledzić kierunek i średnicę strumienia elektronów – widzimy na powierzchni miki barwny ślad wiązki elektronowej. Wprowadzamy prawoskrętny układ współrzędnych, w którym:

- oś X to kierunek ruchu elektronów,
- oś Y jest prostopadła do płaszczyzny cewek,
- oś Z jest prostopadła do kierunku ruchu elektronów i osi Y.

Elektrony poruszają się ruchem jednostajnym, równolegle do blaszek kondensatora, z prędkością v_x, zależną od energii, nadanej im przez napięcie anodowe, U_A, naszego „działa elektronowego”.

Elektrony w lampie poruszają się między dwiema równoległymi, płaskimi blaszkami. Jeżeli przyłożymy do nich stałe napięcie U_0, to tworzymy naładowany kondensator płaski, wewnątrz którego istnieje pole elektryczne o natężeniu E, proporcjonalne do napięcia U_0 i zależne od odległości okładek d:

$$E = \frac{U_0}{d} \tag{1}$$

Wektor natężenia pola, a więc również wektor siły działającej na elektrony w lampie, jest prostopadły do okładek kondensatora, ma kierunek osi Z – siła działająca na elektrony będzie nam odchylać je albo „do góry”, albo „do dołu”, co można zaobserwować na powierzchni płytki z miki. Zwrot wektora siły zależy od tego, która z okładek kondensatora ma ładunek (+). Wielkość działającej na ładunek q siły F znamy:

$$F_E = eE = e\frac{U_0}{d} \tag{2}$$

Stała siła działająca na elektrony oznacza, że ruch elektronów, zgodny z kierunkiem pola E, będzie ruchem jednostajnie przyspieszonym, z przyspieszeniem

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{eE}{m} = e\frac{U_0}{m \cdot d} \tag{3}$$

Wypadkowa prędkość elektronu będzie złożeniem stałej prędkości w kierunku osi X v_x i prędkości w kierunku osi Z wynikającej z istnienia przyspieszenia a. Wypadkowy tor elektronów, widoczny na powierzchni miki, będzie parabolą w płaszczyźnie XZ. Podobne składanie prędkości występuje przy opisywaniu rzutu poziomego przedmiotu o masie m w ziemskim polu grawitacyjnym.

Po obu stronach lampy mamy dwa kołowe (o promieniu R) solenoidy (tzw. „cewki Helmholtza”), przez które możemy przepuszczać prąd elektryczny (stały) o natężeniu I_H. Gdy przez cewki, umieszczone równolegle do siebie w odległości R (w naszym zestawie, w płaszczyźnie XZ), płynie prąd I_H, to pomiędzy cewkami utworzone zostaje stałe pole magnetyczne, skierowane prostopadle do płaszczyzny cewek, którego zwrot i natężenie zależy od kierunku oraz natężenia prądu w cewkach. Powstałe pole magnetyczne ma kierunek osi Y, co dla elektronów w lampie oznacza „w lewo” lub „w prawo”.

Na ładunek q, poruszający się z prędkością v w polu magnetycznym o indukcji B, prostopadłym do prędkości, działa siła F_B, prostopadła i do wektora $\boldsymbol{B}$ i do wektora prędkości, o wartości:

$$F_B = qvB \tag{4}$$

Siła F_B działać będzie w kierunku osi Z, powodując zakrzywienie toru elektronów, łatwo widoczne na płaszczyźnie miki. Tor elektronu w polu $\boldsymbol{B}$ jest bowiem okręgiem w płaszczyźnie XZ prostopadłej do kierunku wektora $\boldsymbol{B}$.

Możemy więc, przez odpowiedni dobór prądu w cewkach, kompensować siłą F_B siłę F_E, działającą na elektron w wyniku istnienia w kondensatorze pola elektrycznego o wektorze $\boldsymbol{E}$.

Manipulując jednocześnie polami możemy np. polem magnetycznym znieść odchylenie wiązki elektronów wywołane polem elektrycznym. Pomiary fizyczne, polegające na „zerowaniu” efektu, czyli takie, w których kompensujemy skutki pewnego oddziaływania innym oddziaływaniem, wyróżniają się bardzo dużą precyzją.

W kilku wersjach naszego ćwiczenia wyznaczamy wartość liczbową stosunku *e/m* dla elektronów, mierząc elementy toru elektronów poruszających się z prędkością *v* prostopadłą do przyłożonych pól:

- elektrostatycznego o natężeniu ***E***,
- magnetycznego o indukcji ***B***.

Wielkościami mierzonymi bezpośrednio są:

- napięcie anodowe „działa elektronowego”, od którego zależy prędkość elektronów *v*;
- widoczne na płytce luminoforu elementy toru elektronów;
- napięcie przyłożone do płytek kondensatora odchylającego elektrony „do góry” lub „do dołu”;
- natężenie prądu w cewkach Helmholtza (potrzebne do wyznaczenia wartości indukcji pola magnetycznego ***B***, kompensującego odchylenie wynikające z istnienia pola ***E***).

Bezpośrednie pomiary pozwolą (przy zastosowaniu mianowanych stałych liczbowych, podanych przez producentów sprzętu dla aparatury z naszego zestawu) na oszacowanie liczbowych wartości sił działających na elektrony znajdujące się w polach ***E*** lub ***B***.

Wszystkie wielkości podajemy w układzie SI, opartym o metr [m], kilogram [kg], amper [A] i sekundę [s].

Natężenie pola magnetycznego, ***H***, powstałego na osi solenoidu (czyli bloku cewek o promieniu *r*), przez który płynie prąd *I* jest proporcjonalne do wyrażenia *I/r*. Dla danego *r* i znanej odległości pomiędzy płaszczyznami cewek wzór na wartość pola indukcji magnetycznej ***B*** (w weberach na m^2) jest następujący:

$$B = \mu_0 H = const \cdot I_H \quad \left[Wb / m^2\right] \tag{5}$$

W naszym zestawie aparaturowym wartość liczbowa *B* wynosi:
$B = 4{,}17 \cdot 10^{-3} \cdot I_H$ [Wb/m^2],
$B^2 = 17{,}39 \cdot 10^{-6} \cdot I_H^2$,
jeżeli wartość natężenia prądu I_H podamy w amperach.

Wzór na wartość *e/m* wynika z prawa zachowania energii:

$$eU_A = \frac{mv^2}{2} \tag{6}$$

czyli:

$$\frac{e}{m} \cdot U_A = \frac{v^2}{2} \tag{7}$$

oraz prawa dynamiki ruchu po okręgu:

$$\frac{mv^2}{R} = evB \tag{8}$$

czyli:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{BR} \tag{9}$$

Z przyrównania:

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U_A} \tag{10}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{2U_A} \cdot \left(\frac{e}{m} \cdot BR\right)^2 \tag{11}$$

otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_A}{B^2 R^2} \tag{12}$$

Oczekiwana wartość parametru *e/m* wynosi:

$$\frac{e}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} C}{9{,}1094 \cdot 10^{-31} kg} = 1{,}759 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \tag{13}$$

4. PRZEBIEG DOŚWIADCZENIA

WARIANT 1

W tej wersji zadania dla danego natężenia prądu w cewkach Helmholza dobieramy napięcie anodowe U_A w taki sposób, aby odchylona wiązka elektronów trafiała w punkt F (patrz rysunek 2 w ramce na stronie 7). Wtedy promień okręgu, po którym porusza się elektron wynosi R_F, przy czym $R_F^2 = 3200 \cdot 10^{-6}$ m^2. Zatem ćwiczenie wykonujemy w następujący sposób:

A) Ustalamy napięcie anodowe na ok. 4,5 kV.

B) Dobieramy tak I_H, aby osiągnąć punkt F.

C) Zmieniając I_H, dobieramy takie U_A, aby $R = R_F$.

D) Z wartości I_H oraz U_A obliczamy:

$$\frac{e}{m} = 3{,}594 \cdot 10^{10} \frac{U_A}{I_H^2} \tag{14}$$

E) Powtarzamy pomiary przy zmienionym kierunku prądu w cewkach. Wszystkie wyniki zapisujemy w tabeli 1.

F) Znając wartość ładunku elementarnego obliczamy prędkość elektronów v_x w przybliżeniu nierelatywistyczym i ewentualnie relatywistycznym (patrz uzupełnienie).

WARIANT 1a

Powtarzamy ćwiczenie kierując wiązkę w punkt odległy od F o L = 40 mm (patrz rys. 2). Wtedy $R = R_{40}$, gdzie $R^2 = 20000 \cdot 10^{-6}$ m^2, a stosunek e/m wyznaczamy ze wzoru:

$$\frac{e}{m} = 5{,}76 \cdot 10^{9} \frac{U_A}{I_H^2} \tag{15}$$

Wyniki pomiarów notujemy w tabeli 1a.

WARIANT 1b

Powtarzamy ćwiczenie kierując wiązkę w punkt E (rys. 2). Wtedy $R^2 = 800 \cdot 10^{-6}$ m^2, a stosunek e/m wyznaczamy ze wzoru:

$$\frac{e}{m} = 1{,}44 \cdot 10^{11} \frac{U_A}{I_H^2} \tag{16}$$

Wyniki pomiarów notujemy w tabeli 1b.

WARIANT 2

A) Ustalamy napięcie anodowe U_A, np. 2,5 kV.

B) Ustalamy napięcie na kondensatorze U_0.

C) Podajemy na cewki taki prąd I_H, aby kompensować zaobserwowane wychylenie.

D) Odłączamy napięcie U_0, notujemy punkt przecięcia wiązki z krawędzią kwadratu z luminoforem (patrz rysunek 2), zapisujemy wartość L w tabeli 2.

Z wyzerowania biegu wiązki wiemy, że prędkość elektronów wynosi $v = E/B$, a z przyrównania sił działających na elektron mamy $mv^2/R = eVB$. W tej sytuacji stosunek e/m możemy obliczyć ze wzoru:

$$\frac{e}{m} = 0{,}72 \cdot 10^{10} \frac{U_0}{I_H^2 R} \tag{17}$$

Promień R możemy obliczyć ze wzoru (patrz ramka na stronie 7):

$$R^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{80^2 + L^2}{80 - L} \right)^2 \tag{18}$$

Uwaga: R oraz L są wyrażone w mm.

E) Obliczamy prędkość elektronów v korzystając ze wzorów podanych w uzupełnieniu na stronie 8.

WARIANT 3

A) Ustalamy U_A, np. 4,5 kV.

B) Ustalamy U_0, np. 100 V.

C) Kompensujemy odchylenie prądem I_H.

D) Z kompensacji F_E i F_B mamy:

$$evB = e\frac{U_0}{d} \tag{19}$$

Z zasady zachowania energii:

$$e \cdot U_A = \frac{mv^2}{2} \tag{20}$$

otrzymujemy:

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U_A} = \left(\frac{U_0}{d \cdot B} \right)^2 \frac{1}{2U_A} \tag{21}$$

Jeżeli stosujemy jednostki: U_0 – [V], U_A – [kV], I – [A], otrzymujemy zależność:

$$\frac{e}{m} = 4{,}5 \cdot 10^5 \frac{U_0^2}{U_A I_H^2} \tag{22}$$

E) Wyniki pomiarów notujemy w tabeli 3. Obliczamy prędkość elektronów v.

TABELA 1

Lp.	Prąd w cewkach I_H [A]	U_A/I_H^2	Wartość średnia U_A [kV]	Napięcie anodowe U_A [kV]					
				odchylenie „do góry”			odchylenie „do dołu”		
1.	1,1								
2.	1,0								
3.	0,9								
4.									
5.									
6.									
7.	0,5								
wartość średnia									
e/m									

TABELA 1a

Lp.	Prąd w cewkach I_H [A]	U_A/I_H^2	Wartość średnia U_A [kV]	Napięcie anodowe U_A [kV]					
				odchylenie „do góry”			odchylenie „do dołu”		
1.	0,2								
2.	0,3								
3.	0,4								
wartość średnia									
e/m									

TABELA 1b

Lp.	Prąd w cewkach I_H [A]	U_A/I_H^2	Wartość średnia U_A [kV]	Napięcie anodowe U_A [kV]					
				odchylenie „do góry”			odchylenie „do dołu”		
1.	1,3								
2.	1,2								
3.	1,1								
wartość średnia									
e/m									

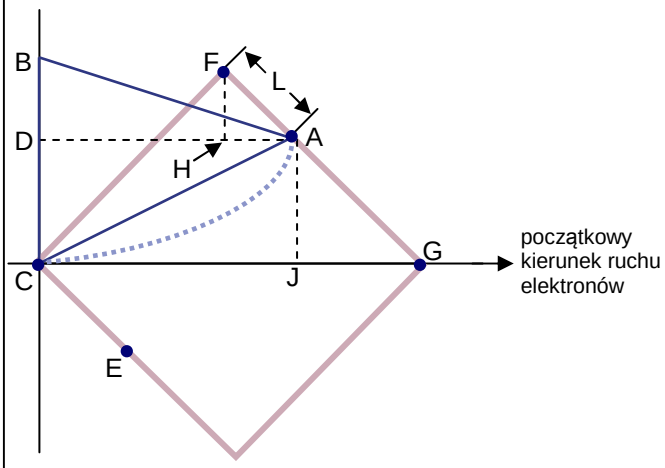
TABELA 2

Lp.	Napięcie anodowe U_A [kV]	Napięcie kondensatora U_0 [V]	Prąd cewek I_H [A]	L [mm]	R [mm]	e/m
1.	2,5					
		...				
					wartość średnia	
2.	3,5					
		...				
					wartość średnia	

TABELA 3

Lp.	Napięcie anodowe U_A [kV]	Prąd cewek I_H [A]	Napięcie kondensatora U_0 [V]			Wartość średnia U_0 [V]	e/m
1.	2,5						
		...					
						wartość średnia	
2.	4,5						
		...					
						wartość średnia	

WYPROWADZENIE WZORU WIĄŻĄCEGO PROMIEŃ R I ODLEGŁOŚĆ L



Rys. 2

Ruch elektronu w polu magnetycznym odbywa się po okręgu o promieniu *R*:

- elektrony „wchodzą” na kwadrat w punkcie **C,**
- boki kwadratu **CF** = **FG** = 80 mm,
- punkt **A** to przecięcie toru elektronu z brzegiem kwadratu na powierzchni płatka miki,
- odległość punktu **A** od rogu kwadratu, **F**, wynosi *L*,
- początkowa prędkość elektronu ma kierunek przekątnej **CG** tego kwadratu,
- **AB** = **BC** = **R**.

W trójkącie **ABC** mamy dwie zależności:

$$(AB)^2 = (BD)^2 + (AD)^2 \ (*)$$

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2 \ (**).$$

Ponieważ w trójkącie **ACF**:

$$(AC)^2 = (AF)^2 + (FC)^2,$$

to przyjmując współrzędne punktu **A** za (x, z) mamy:

$$x^2 + z^2 = 80^2 + L^2.$$

Ponieważ $BD = R - z$, podstawienie na **AD** wartości z równania (**) prowadzi do równania (*) w postaci:

$$R^2 = (R - z)^2 + (AC)^2 - (DC)^2 =$$
$$= R^2 - 2Rz + x^2 + z^2.$$

Skąd:

$$2Rz = x^2 + z^2 = 80^2 + L^2 \ (***).$$

Z proporcji boków trójkątów podobnych **AFH** oraz **AJG** mamy:

$$(FH):L = z:(80 - L) \ (****).$$

Oznaczając przekątną kwadratu przez *h* widać, że

$$FH = h/2 - z.$$

A więc proporcja (****) ma postać:

$$(h/2 - z):L = z:(80 - L).$$

Po obliczeniu wartości *z* i podstawieniu tej wartości do wzoru (***) otrzymujemy ostatecznie:

$$R^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{80^2 + L^2}{80 - L} \right)^2$$

UZUPEŁNIENIE - KINEMATYKA RELATYWISTYCZNA

Przy prędkościach porównywalnych z prędkością światła w próżni do poprawnego wyliczenia prędkości cząstki o znanej energii kinetycznej potrzebne są nam wzory mechaniki relatywistycznej, oparte o teorię względności Einsteina. W mechanice relatywistycznej, „einsteinowskiej”, masa cząstki w ruchu, m, zwiększa się wraz ze wzrostem prędkości, a więc prędkość cząstki rośnie ze wzrostem energii kinetycznej inaczej niż we wzorze:

$$\upsilon^2 = \frac{2E_{kin}}{m}$$

Korzystamy ze wzorów:

- całkowita energia cząstki, E_C, to suma energii kinetycznej, E_{kin}, oraz energii m_0c^2, równoważnej masie spoczynkowej. Podstawowa zależność:
$$E_C = m_o\gamma c^2 = E_{kin} + m_0c^2$$
- prędkość cząstki, υ, wyrażana jest w ułamkach prędkości światła w próżni c,
$$\upsilon = \beta c$$
- liczba γ, we wzorze na całkowitą energię cząstki, jest funkcją prędkości cząstki:
$$\beta = \frac{\upsilon}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}}$$

Wniosek: znając energię kinetyczną E_{kin} i masę spoczynkową m_0 możemy wyliczyć γ oraz β i stąd znaleźć prędkość:

$$E_C = m_0\gamma c^2 = E_{kin} + m_0c^2, \text{ czyli}$$
$$\gamma = 1 + E_{kin}/m_0c^2, \ \upsilon = \beta c$$

Wzory te pokazują, że cząstka o masie spoczynkowej, różnej od zera, nigdy nie może osiągnąć prędkości światła w próżni, ***c***: liczba γ zawsze jest większa od jedności, a ułamek β zawsze jest mniejszy od jedności.